|  |
| --- |
| **Page 1** |

**Лекция 1.**

**Основные понятия теории вероятностей и комбинаторики**

**план лекции**

[1. Предмет теории вероятностей и математической статистики.](https://translate.googleusercontent.com/translate_f#2) [........................... 2](https://translate.googleusercontent.com/translate_f#2)

[2. Понятие стохастического эксперимента.](https://translate.googleusercontent.com/translate_f#2) [.................................................. ........... 2](https://translate.googleusercontent.com/translate_f#2)

[3. Пространство элементарных событий.](https://translate.googleusercontent.com/translate_f#3) [.................................................. ........................... 3](https://translate.googleusercontent.com/translate_f#3)

[4. Совместимые и несовместимые события.](https://translate.googleusercontent.com/translate_f#3) [.................................................. ............................... 3](https://translate.googleusercontent.com/translate_f#3)

[5. Операции над событиями.](https://translate.googleusercontent.com/translate_f#4) [.................................................. ....................................... 4](https://translate.googleusercontent.com/translate_f#4)

[6. Основные понятия комбинаторики ............................................. ........................... 6](https://translate.googleusercontent.com/translate_f#6)

[Вопросы для самопроверки ............................................... .................................... 7](https://translate.googleusercontent.com/translate_f#7)

**Вопросы, рассматриваемые**

Предмет теории вероятностей и математической статистики,

достоверное событие, невозможное событие, случайное событие, эксперимент,

стохастический эксперимент, пространство элементарных событий, совместимые события,

несовместимые события, равновозможны события, способствующие последствия для события,

операции над событиями: включение, тождество, сумма, произведение, разность;

свойства операций над событиями, правила суммы и произведения

комбинаторики, размещение, перестановки, сочетания.

|  |
| --- |
| **Page 2** |

***1. Предмет теории вероятностей и математической статистики.***

***Теория вероятностей -*** специальный раздел курса высшей математики, изучающий математические закономерности массовых однородных случайных событий.  Следует особо подчеркнуть, что методы теории вероятностей по своей сути не дают возможности предсказать результат *отдельного* случайного события, но дают возможность *предусмотреть средний суммарный результат* массы однородных случайных событий.

Методы теории вероятностей широко используются в экономике, в теории надежности, теории информации, теории массового обслуживания, теории принятия решений, в физике, астрономии и других дисциплинах. Теория вероятностей лежит в основе ***математической статистики,*** которая, в свою очередь, используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, контроле качества продукции и др.

***Математическая статистика*** - наука о математических методах систематизации и использования статистических данных для научно обоснованных прогнозов и практических рекомендаций.

Вообще говоря, все наблюдательные события (явления) окружающего нас мира можно разделить на следующие три вида: ***достоверные,*** ***невозможные*** и ***случайны.***

***Достоверной*** называют событие, которое обязательно произойдет, если будет проделана определенная совокупность условий. *Пример.* Лед плавится при температуре выше нуля.

***Невозможной*** называют событие, которое точно не произойдет при выполнении определенной совокупности условий. *Примеры.* 1) Лед не может существовать при 100 градусах Цельсия. 2) Земля не может без воздействия извне прекратить свое вращение.

***Случайной*** называют событие, которое при выполнении совокупности условиях может произойти или не произойти. *Примеры.* 1) выпадение определенного числа очков при бросании игральной кости. 2) Попадание снаряда в цель. 3) Выход из строя технического устройства. 4) Получение определенной прибыли фирмой и тому подобное.

***2. Понятие стохастического эксперимента.***

***Экспериментом*** называется реализация намеченного действия, приводящего к некоторому результату. Эксперименты делятся на детерминированы и стохастические (случайные).

Эксперимент называется ***детерминированным,*** если, исходя из условий, описывающих эксперимент, его результат предсказуем.

*Примеры.* 1) Камень, подброшенный вверх, обязательно упадет вниз. 2) Повышение жизненного уровня вызывает рост потребления товаров. 3) Поломка системного блока выводит из строя компьютер.

Эксперимент считается ***стохастическим (случайным),*** если он может закончиться любым из некоторой совокупности известных результатов, но до осуществления эксперимента нельзя сказать, каким именно.

Теория вероятностей исследует именно стохастические эксперименты, вернее модели ***экспериментов со случайными последствиями.*** при этом рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторять (воспроизводить) при неизменном комплексе условий произвольное количество раз (по крайней мере теоретически).

Будем рассматривать ***событие*** как результат эксперимента.

*Примеры.* 1) Стрелец стреляет по мишени, которая разделена на несколько частей. Выстрел - это эксперимент, попадания в определенную часть мишени -

событие. 2) Доставание шара из урны - эксперимент, появление шара определенного

цвета - событие. 3) Сдача экзамена - эксперимент, получение оценки - событие.

***3. Пространство элементарных событий.***

Пусть в результате эксперимента наступает одно и только одно из событий



События *i* называют ***элементарными событиями.***

***Пространством элементарных событий*** называют множество всех элементарных событий, которые могут появиться в эксперименте.

***Точками пространства.*** называются самые элементарные события.

Пространство элементарных событий обычно считается заданным, если указаны все его элементы.

*Пример.* Для эксперимента с подбрасыванием игральной кости пространство элементарных событий образует совокупность элементарных событий {1,2,3,4,5,6}; при подбрасывании монеты {Ц, Г}.

Из элементарных событий можно составить более сложное событие. Иными словами, каждая случайное событие *A* определяется как подмножество в множестве элементарных событий. При этом те элементарные последствия с, при которых событие *A* наступает(то есть принадлежит подмножеству *A),* называют  ***способствующими***  событиями *A.* Говорят, что событие *A* произошло, если результатом эксперимента стала элементарное событие, принадлежащее *A* (*A).*

*Примеры.* 1) При подбрасывании игрального кубика события "выпадение четного количества очков "способствуют элементарные события {2,4,6}. 2) Сдачи экзамена способствует получения 3, 4 или 5 баллов.

***4. Совместимые и несовместимые события.***

Два события называются ***совместными*** в данном эксперименте, если появление одного из них не исключает появление другого.

*Примеры.* 1) Попадание в цель двумя различными стрелками. 2) Выпадение одинакового числа очков на двух *кубиках.*

Два события называются ***несовместимыми*** в данном эксперименте, если они не могут состояться вместе при одном и том же эксперименте. Несколько событий называются ***несовместимыми,*** если они попарно несовместимы.

*Примеры.* 1) Попадание и промах при одном выстреле. 2) Из ящика с деталями наугад получили деталь - события "получили стандартную деталь" и "получили нестандартную деталь". 3) Разорение фирмы и получения ею прибыли.

Иными словами, события *A* и *B* совместимы, если соответствующие множества *A* и *B* имеют общие элементы и несовместимы, если соответствующие множества *A* и *B* не имеют общих элементов.

При определении вероятностей событий часто используется понятие ***равновозможных*** событий.

Несколько событий в данном эксперименте называются ***равновозможными,*** если по условиям симметрии основания считать, что ни одна из них объективно не является более возможным, чем другие.

*Примеры.* 1) Выпадение герба и цифры. 2) Появление карты любой масти. 3) Выбор шара из урны и тому подобное.

***5. Операции над событиями.***

С каждым экспериментом связан ряд событий, которые, вообще говоря, могут появиться одновременно.

*Пример.* При бросании игральной кости событие *A* – выпадение двойки, а событие *B* - выпадение четного числа очков. Очевидно, что эти события не исключают друг друга.

Пусть все возможные результаты испытания осуществляются в ряде единственно возможных частных случаев, взаимно исключают друг друга. тогда:

* каждый следствие испытания представляется одной и только одной элементарной событием;
* всякое событие *A,* связанная с этим испытанием, есть множество конечного

или бесконечного числа элементарных событий;

* событие *A* происходит тогда и только тогда, когда реализуется одна из элементарных событий, принадлежащих этому множеству.

Произвольный, но фиксированный пространство элементарных событий, можно

представить в виде некоторой области на плоскости. при этом

элементарные события

 - Это точки плоскости, лежащие внутри. Так как событие отождествляется с множеством, то над событиями можно осуществлять все операции, производимые над множествами.

По аналогии с теорией множеств строится ***алгебра событий.*** При этом могут быть определены следующие операции и соотношения между событиями:

(отношение включения множеств: множество *A* является подмножеством

множества *В)* ***-*** с события *A* следует событие *B.* Иными словами, событие *B*

происходит каждый раз, когда происходит событие *A.*

*Пример.* С выпадения двойки следует выпадения четного числа очков.

2) *BA* (отношение эквивалентности множеств)

Событие *А****тождественна*** или ***эквивалентна*** события *В,* если *BA* и

одновременно *AB,* то есть каждая из них происходит каждый раз, когда

происходит другая.

*Пример.* Событие *A* - поломка прибора, событие *B* - поломка хотя бы

одного из блоков (деталей) прибора.

3) *BA* *(BA)* ***- сумма событий.***

***Сумма событий*** - это событие, которое заключается в том, что произошло хотя бы

одно из двух событий *A* или *B* (логическое "или").

В общем случае, под суммой нескольких событий понимают

событие, которое заключается в появлении хотя бы одного из этих событий.

*Пример.* Цель поражена первым стрелком, вторым или обоими

одновременно.

4) *AB* *(BA)* ***- произведение событий.***

***Произведение событий*** - это событие, которое заключается в совместном осуществлении

событий *A* и *B* (логическое "и").

В общем случае, под произведением нескольких событий понимают

событие, которое заключается в одновременном осуществлении всех этих событий.

Таким образом, события *A* и *B* несовместимы, если произведение их есть событие

невозможна, то есть *AB*

.

*Пример.* Событие *A* - извлечение из колоды карты бубновой масти,

событие *B* - извлечение туза, тогда *AB* - появление бубнового туза.

5) *BA-****разница событий.***

***Разница событий*** - это событие, состоящее из последствий, которые входят в

*A,* но не входят в *B.* Она заключается в том, что происходит событие *A,*

но при этом не происходит событие *B.*

*Пример.* *A* - сдача экзаменационной сессии, *B* - получение

стипендии, тогда *BA* - сдача сессии с недостаточно высоким для

получение стипендии результатом.

***Противоположной событием (дополняющих)*** для события *A* (обозначается

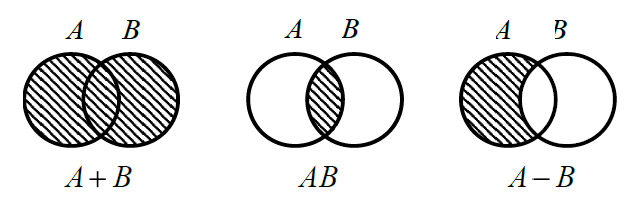
*A)* называется событие, состоящее из всех последствий, не

входят в *A.*

Наступления события *A* означает просто, что событие *A* не наступила.

Часто бывает полезной геометрическая интерпретация операций над

событиями. Графическая иллюстрация операций называется диаграммами Венна.

 ***Свойства операций над событиями.***

Некоторые свойства операций над событиями постулуються, другие легко

можно получить с помощью диаграмм Венна. Приведем без доказательства

основные из этих свойств.



***6. Основные понятия комбинаторики***

При разрешении ряда теоретических и практических задач нужно с конечного множества элементов по заданным правилам составлять различные соединения и подсчитывать количество всех возможных таких соединений.

***Комбинаторика*** - это раздел математики, изучающий расположение объектов в соответствии со специальными правилами и методы подсчета количества всех возможных способов, которыми эти расположения можно осуществить.

***Правила суммы и произведения***

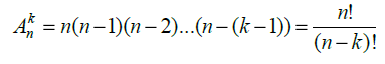
***Правило суммы*** - если элемент *а* может быть выбран *n* способами, а элемент *b* - *m* способами, то один из этих элементов можно выбрать *n + m* способами.

***Правило произведения*** - если элемент  *а* может быть выбран *n* способами и после каждого такого выбора элемент *b* можно выбрать *m* способами, то пару *(ab)* из элементов в указанном порядке можно выбрать *nm* способами.

***Размещениями****с n* элементов по *k* называются упорядоченные наборы, состоящие из *k* различных элементов, выбранных из *n* данных элементов,.

Размещение могут отличаться как элементами, так и порядком.

***Теорема.*** Число всех размещений с *n* элементов по *k* вычисляется по формуле:



*Доказательство.* Действительно, первый элемент размещения может быть выбран *n* способами. Для каждого из этих вариантов есть *n-1* способов расположение одного из элементов, оставшихся на втором месте. Итак, по правилу произведения, имеем *n (n-1)* различных способов выбора элементов на первых двух местах. Продолжая это суждение, получаем нужную формулу.

*Пример.* Различными размещениями множества из трех элементов {1,2,3} по два будут наборы (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)

***перестановками****n*

*P.* называются размещения при *k = n.* Так как каждая перестановка содержит все *n* элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов и



*Пример.* Различными перестановками множества элементов {1,2,3}

будут (1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,2,1), (3,1,2)

***Сочетаниями (комбинациями)*** с *n* элементов по *k* называются неупорядоченные наборы с *k* элементов, взятых из данных *n* элементов,

***Теорема.*** Число сообщений с *n* элементов по *k* вычисляется по формуле



*Доказательство* можно получить, учитывая, что сообщения отличаются от размещений тем, что в них не важен порядок расположение заданных *k* элементов. Поэтому при равных *n* и *k* число сообщений меньше числа размещений в *k!* раз.

***Вопросы для самопроверки***

1. Что изучает теория вероятности?

2. Какое событие называется достоверным?

3. Какое событие называется невозможным?

4. Какое событие называется случайной?

5. Что такое стохастический эксперимент?

6. называют пространством элементарных событий?

7. Какие события называются совместными?

8. Какие события называются несовместимыми?

9. Что такое равновозможны события?

10. Перечислить операции над событиями.

11. Записать свойства операций над событиями.

12. Что изучает комбинаторика?

13. Сформулировать правила суммы и произведения.

14. Записать формулу для размещений.

15. Записать формулу для перестановок.

16. Записать формулу для сообщений.